Prêts immobiliers

Mathieu Bouville

Remboursements mensuels

Soit $u(t)$ le montant dû au temps t. Pendant le temps δt la dette augmente via le taux d'intérêt $r\,\delta t$ et diminue grâce au remboursement $c\,\delta t$, d'où

$$u(t+\delta t) = (1+r\,\delta t)u(t) - c\,\delta t.$$

En divisant par δt et en réarrangeant, on obtient

$$r\,u(t) - c = \frac{u(t+\delta t)-u(t)}{\delta t} \to u'(t).$$

L'équation différentielle obtenue en prenant $\delta t \to 0$ a comme solution $u(t) = [u(0) - c/r]\,e^{rt} + c/r$, où $u(0) = P - D$ (le montant initialement dû est le montant emprunté : le prix du logement moins l'apport initial). Comme on ne doit plus rien à la fin du prêt, $u(T) = 0$ et on obtient

$$c = \frac{r(P-D)}{1-e^{-rT}}, \tag{1}$$

si bien que $u(t)$ peut s'écrire

$$u(t) = (P-D)\frac{e^{rT}-e^{rt}}{e^{rT}-1}. \tag{2}$$

(Notez que c et r sont respectivement le remboursement par unité de temps et l'intérêt par unité de temps, donc si on a r en année^{-1}, par exemple $r = 4\%$ par an, alors c est le remboursement total par an.)

Pour que u décroisse avec le temps, c doit être supérieur à $r\,u(t)$ et en particulier à sa valeur à $t = 0$: $c > r(P-D)$. Ceci est clair aussi dans l'équation (1) vu que $1 - e^{-rT} < 1$. Ceci donne une limite sur le montant empruntable ($P < D + c/r$) ; ça correspond à ne rembourser que les intérêts et pas le capital.

Fraction des remboursements allant aux intérêts

On peut remarquer que $r\,u(t)$ sont les intérêts à payer à t, donc $r\,u(t)/c$ représente la fraction des remboursements consacrée aux intérêts (le reste rembourse le capital) :

$$\frac{r\,u(t)}{c} = 1 - e^{-r(T-t)}.$$

En particulier la fraction initiale des remboursements consacrée à rembourser le capital est e^{-rT} ; étonnamment, ce chiffre est indépendant de l'apport initial (même si r, et peut-être T, va en dépendre indirectement). Si $T = 20$ ans et $r = 5\%$ par an alors à peine 37% du remboursement initial rembourse le capital (voir tableau I). Les premiers remboursements sont consacrés principalement aux intérêts et peu de l'emprunt est initialement remboursé.

Une approximation utile

L'équation (2) peut être écrite

$$u(t) = (P-D)\frac{1-e^{-r(T-t)}}{r(T-t)}\,\frac{rT}{1-e^{-rT}}\,\frac{T-t}{T}.$$

La fonction $(1-e^{-x})/x$ reviendra souvent. Elle peut être approximée en une exponentielle en notant que

$$\begin{aligned}\ln\frac{1-e^{-x}}{x} &= \ln\left[1-\frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{60}\right)+o(x^4)\right]\\ &= -\frac{x}{2}\left[1-\frac{x}{12}\left(1-\frac{x^2}{120}\right)\right]+o(x^4).\end{aligned}$$

(Notez que l'absence d'un troisième ordre et la faiblesse du quatrième ordre font du second ordre une très bonne approximation.) On a donc

$$\frac{1-e^{-x}}{x} \approx e^{-\alpha_x x} \tag{3}$$

avec

$$\alpha_x = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{12}\right). \tag{4}$$

Si $r = 5\%$ par an et $T = 20$ ans alors $\alpha_{rT} \approx 0{,}46$. Le développement limité $(1-e^{-x})/x$ est $1 - (1 - x/3 + x^2/12 - x^3/60)x/2 + o(x^4)$, alors que celui de $\exp(-\alpha_x x)$ est $1 - (1 - x/3 + x^2/12 - x^3/57.6)x/2 + o(x^4)$: il est correct au troisième ordre et le quatrième ordre est très proche. L'erreur est inférieure à 5% si $x < 3{,}65$; si $x = rT$ ça veut dire $r < 18\%$ sur 20 ans (et si $r > 18\%$, vous avez d'autres problèmes que la qualité de l'approximation).

En remarquant que

$$\frac{1-e^{-x}}{x}\,\frac{y}{1-e^{-y}} \approx \exp\left[-\alpha_{x+y}(x-y)\right],$$

les remboursements et le montant encore dû sont

$$c \approx (P-D)\frac{e^{\alpha_{rT} rT}}{T} \tag{5}$$

et

$$u(t) \approx (P-D)\frac{T-t}{T}\exp\bigl[\alpha_{r(2T-t)} rt\bigr]. \tag{6}$$

T	r														
15 ans	2,92%	3,33%	3,75%	4,17%	4,58%	5,00%	5,42%	5,83%	6,25%	6,67%	7,08%	7,50%	7,92%	8,33%	8,75%
20 ans	2,19%	2,50%	2,81%	3,13%	3,44%	3,75%	4,06%	4,38%	4,69%	5,00%	5,31%	5,63%	5,94%	6,25%	6,56%
25 ans	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	3,75%	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%	5,25%
30 ans	1,46%	1,67%	1,88%	2,08%	2,29%	2,50%	2,71%	2,92%	3,13%	3,33%	3,54%	3,75%	3,96%	4,17%	4,58%
e^{rT}	1,55	1,65	1,76	1,87	1,99	2,12	2,25	2,40	2,55	2,72	2,89	3,08	3,28	3,49	3,72
e^{-rT}	0,646	0,607	0,570	0,535	0,503	0,472	0,444	0,417	0,392	0,368	0,346	0,325	0,305	0,287	0,269
$e^{\alpha_{rT}rT}$	1,23	1,27	1,31	1,34	1,38	1,42	1,46	1,50	1,54	1,58	1,62	1,67	1,71	1,75	1,80
$e^{-\alpha_{rT}rT}$	0,810	0,787	0,765	0,744	0,723	0,704	0,685	0,666	0,649	0,632	0,616	0,600	0,585	0,571	0,557
c (20 ans)	514 €	529 €	545 €	560 €	576 €	592 €	609 €	625 €	642 €	659 €	677 €	694 €	712 €	730 €	748 €
c (25 ans)	412 €	424 €	436 €	448 €	461 €	474 €	487 €	500 €	514 €	525 €	540 €	555 €	570 €	585 €	600 €

Tableau I: Valeurs numériques de e^{rT}, $e^{\alpha_{rT}rT}$ et c (en €/mois, pour $P - D = 100\,000$ €, $T = 20$ et 25 ans) pour plusieurs combinaisons de r et T. Tous les taux dans la même colonne donnent la même valeur de rT.

$\partial \rightarrow$ / $\partial \downarrow$	c	CTE
r	$\left(2\alpha_{rT} - \frac{1}{2}\right)cT \approx 10\,c$	$\left(2\alpha_{rT} - \frac{1}{2}\right)T \exp[\alpha_{(r+i)T}(r-i)T](P-D) \approx 15(P-D)$
T	$-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{rT} - 2\alpha_{rT}\right)c\,r \approx -2\%\,c$	$\left[2\alpha_{(r+i)T} - \frac{1}{2}\right](r-i)\exp[\alpha_{(r+i)T}(r-i)T](P-D) \approx 1.7\%(P-D)$
D	$-\dfrac{e^{\alpha_{rT}rT}}{T} \approx -7\%$	$-\left\{\exp[\alpha_{(r+i)T}(r-i)T] - 1\right\} \approx -0.40$
P	$\dfrac{e^{\alpha_{rT}rT}}{T} \approx 7\%$	$\exp[\alpha_{(r+i)T}(r-i)T] - 1 \approx 0.40$

Tableau II: Dérivées des remboursements et du coût total de l'emprunt par rapport à r, T, D et P. Valeurs numériques pour $r = 5\%$, $i = 2\%$, $T = 25$ ans.

Coût total de l'emprunt

En première approximation on peut dire que le coût total est l'apport initial D plus les frais ϕ (y compris impôts) plus tous les remboursements mensuels moins la valeur du logement, c'est-à-dire $CTE = D + \phi + cT - P$. (Notez que ceci est le coût de l'emprunt lui-même, c'est-à-dire la dépense *en plus* de ce qui est payé pour le logement.) On devrait cependant remarquer qu'on a implicitement supposé que le premier remboursement de c et le dernier remboursement (15–20 ans plus tard) ont la même valeur. En fait on doit actualiser les remboursements futurs à un certain taux i (par exemple l'inflation), de sorte que le coût total de l'emprunt est

$$CTE = D + \phi - P + \int_0^T c\,e^{-it}dt.$$

Ce qui donne

$$CTE = (P - D)\left(\frac{rT}{1 - e^{-rT}}\,\frac{1 - e^{-iT}}{iT} - 1\right) + \phi.$$

En utilisant l'équation (3), le coût total est approximativement

$$CTE \approx (P - D)\left[e^{\alpha_{(r+i)T}(r-i)T} - 1\right] + \phi. \qquad (7)$$

Les taux r et i et la durée de l'emprunt T n'ont pas d'importance individuellement : seul le produit $(r - i)T$ compte (au plus bas ordre). (Si $i = 2\%$ par an alors une augmentation de r de 4% à 5% donne une augmentation de $r - i$ de 2% à 3%, c'est-à-dire une augmentation nominale de 25% augmente le coût total de 50%.) De même, P et D ne sont pas importants : seul le montant emprunté $(P - D)$ compte.

En utilisant que $P - D = P - K + \phi$ (apport personnel = capital − frais), l'équation (7) donne le vrai coût des frais :

$$CTE - CTE(\phi = 0) \approx \exp[\alpha_{(r+i)T}(r - i)T]\phi.$$

On peut approximer le CTE un peu plus :

$$CTE \approx \alpha_{2(2i-r)T}(r - i)T(P - D) + \phi. \qquad (8)$$

Le taux effectif (non-composé) est de $[1 + (r - 2i)T/6](r - i)/2$.

Il faut noter qu'il a été implicitement supposé que la valeur du logement ne changerait pas avec le temps. En fait on devrait utiliser sa valeur à T en argent d'aujourd'hui : $Pe^{(i'-i)T}$. (Notez que ceci ne tient pas compte de possibles taxes sur les plus-values.) On peut obtenir un gain total net comme la plus-value moins le coût du prêt : $GTN = P[e^{(i'-i)T} - 1] - CTE$, ce qui donne

$$GTN \approx P\left[e^{(i'-i)T} - 1\right] - (P - D)\left[e^{\alpha_{(r+i)T}(r-i)T} - 1\right] - \phi.$$